

PROBLEM DER WOCHE

Nr. 4 (24. Juni 2013):

Die Summe aus einer Zahl und ihrem Kehrwert beträgt 1. Wie groß ist die Summe aus der vierten Potenz dieser Zahl und der vierten Potenz ihres Kehrwerts?

Lösung:

Es gilt:

$$x + \frac{1}{x} = 1 \implies \left(x + \frac{1}{x}\right)^4 = 1 \implies x^4 + 4x^2 + 6 + \frac{4}{x^2} + \frac{1}{x^4} = 1. \quad (1)$$

Somit:

$$x^4 + \frac{1}{x^4} = -5 - 4\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right). \quad (2)$$

Analog zu (1) können wir den Klammerterm umschreiben:

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = 1 \implies x^2 + 2 + \frac{1}{x^2} = 1 \implies x^2 + \frac{1}{x^2} = -1 \quad (3)$$

Wir setzen dies in (2) ein und erhalten

$$x^4 + \frac{1}{x^4} = -1. \quad (4)$$

Bemerkung:

Es gibt keine reelle Zahl, die die Bedingung $x + \frac{1}{x} = 1$ erfüllt (was für die Aufgabenstellung irrelevant ist). Diese Gleichung besitzt jedoch Lösungen in der Menge der komplexen Zahlen.

[Innerhalb von vier Wochen ab dem Erscheinungsdatum der jeweiligen Aufgabe können Lösungen als pdf-Attachments an mathnet@ph-noe.ac.at geschickt werden. Die Namen der Einsender/innen korrekter Lösungen werden in der Reihenfolge des Einlangens auf der **MATHNET** Website angeführt.]

MATHNET

E-mail: mathnet@ph-noe.ac.at

Web: <http://www.mathnet.at>

Pädagogische Hochschule Niederösterreich

Mühlgasse 67, 2500 Baden

