PROBLEM DER WOCHE

Nr. 26 (13. Jänner 2014):

Was ist der größtmögliche Wert des Produkts xy unter der Bedingung, dass (x, y) ein Punkt des Einheitskreises ist (d.h. dass $x^2 + y^2 = 1$)?

Lösung:

Zunächst ist klar, dass es eine Lösung geben muss, denn der Wert des Produkts xy ändert sich entlang des Einheitskreises, liegt aber zugleich mit Sicherheit stets zwischen -1 und 1 (weil dies für beide Faktoren gilt). Vertauscht man die Variablen x und y, dann ändert sich nichts an der Fragestellung; man sagt in so einem Fall: „Das Problem ist invariant unter Vertauschung von x und y“. Diese Eigenschaft muss dann auch die Lösung des Problems besitzen. Wir wissen also, dass die Lösung sich nicht ändern darf, wenn man x und y vertauscht. Der gesuchte Punkt (x, y) muss daher die Form $(x, y) = (a, a)$ haben, wobei a eine Zahl zwischen -1 und 1 ist. Mit der Bedingung $x^2 + y^2 = 1$ kommt man dann sofort auf die beiden Punkte

$$P_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \quad P_2 = -P_1,$$

d.h. der maximale Wert des Produkts xy entlang des Einheitskreises ist $\frac{1}{2}$.

[Innerhalb von vier Wochen ab dem Erscheinungsdatum der jeweiligen Aufgabe können Lösungen als pdf-Attachments an mathnet@ph-noe.ac.at geschickt werden. Die Namen der Einsender/innen korrekter Lösungen werden in der Reihenfolge des Einlangens auf der MATHNET Website angeführt.]

MATHNET
E-mail: mathnet@ph-noe.ac.at
Web: http://www.mathnet.at
Pädagogische Hochschule Niederösterreich
Mühlgasse 67, 2500 Baden