# PROBLEM DER WOCHE

## Nr. 24 (9. Dezember 2013):

Finde eine Formel für die Summe aller natürlichen Zahlen von 1 bis $n$, also für

$$1+2+3+...+n.$$

**Steigerung:** Beweise, dass deine Formel wirklich für alle natürlichen Zahlen gilt.

## Lösung:

Es ist $1+2+3+...+n = \frac{n(n+1)}{2}$.

**Steigerung:** Wir überprüfen die Gültigkeit unserer Formel zunächst für den Fall $n=1$:

$$n=1: \frac{n(n+1)}{2} = \frac{1\cdot 2}{2} = 1.$$

Wir nehmen nun an, dass die Formel für die Summe $1+2+3+...+n$ stimmt. Für die Summe $1+2+3+...+n+(n+1)$ gilt dann:

$$1+2+3+...+n+(n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

Dies ist aber genau unsere Formel für den Fall, dass bis $n+1$ summiert wird. Wir haben also durch diese kurze Rechnung gezeigt, dass die Formel, falls sie für irgendeine natürliche Zahl gilt, auch für den Nachfolger dieser Zahl gilt. Da wir aber auch schon wissen, dass die Formel für $n=1$ gilt, muss sie demnach auch für $n=2$ gelten und damit auch für $n=3$ und damit für $n=4$ so weiter. Wir haben tatsächlich bewiesen, dass die Formel für alle natürlichen Zahlen gilt. Die Beweismethode, die wir hier angewandt haben, wird in der Mathematik „vollständige Induktion“ genannt.

---

[Innerhalb von vier Wochen ab dem Erscheinungsdatum der jeweiligen Aufgabe können Lösungen als pdf-Attachments an mathnet@ph-noe.ac.at geschickt werden. Die Namen der Einsender/innen korrekter Lösungen werden in der Reihenfolge des Einlangens auf der MATHNET Website angeführt.]

MATHNET
E-mail: mathnet@ph-noe.ac.at
Web: http://www.mathnet.at
Pädagogische Hochschule Niederösterreich
Mühlgasse 67, 2500 Baden